**МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ**

**Средствами Microsoft Excel**

**Штейн Борис Моисеевич**

**Санкт-Петербургский государственный университет кино и телевидения**

Колебания – раздел физики, являющийся в некотором роде межпредметным, поскольку колебательные процессы, описываемые одним математическим аппаратом, присутствуют во всех разделах физики и не только физики. Разумеется, проще всего и понятней для учащихся описание механических колебаний, но простой заменой переменных из них получается описание электрических колебаний, что особенно ярко оттеняется при численном моделировании гармонических колебаний. Хотя процессы при электрических колебаниях в колебательном контуре по физической природе принципиально отличаются от колебаний математического маятника, но их математическое описание, в частности графики изменения колеблющихся величин во времени, тождественны. Колебательные процессы присутствуют и в других разделах физики, химии, биологии и даже в таких далёких от физики дисциплин, как, например, экономика, поскольку даже колебания, например, курса валют можно изучать и моделировать теми же математическими средствами, что и колебания маятника. В данной статье рассмотрим компьютерное моделирование механических колебаний.

Для наиболее простого и наглядного математического моделирования колебательных процессов вполне подходит программа Microsoft Excel, входящая в пакет Microsoft Office. Эта программа ориентирована, прежде всего, на экономические расчеты. Выбор этой программы для моделирования физических процессов обусловлен следующими факторами: во-первых, она достаточна мощная и имеет все необходимые математические средства для решения подобных задач; во-вторых, она очень проста, удобна и хорошо знакома всем учащимся, что позволяет больше времени уделить физике, без затрат времени на изучение самой программы.

Чтобы в механической системе могли возникнуть колебания, она должна обладать двумя свойствами:

1. В системе должно быть положение устойчивого равновесия, при выведении из которого в системе возникает возвращающая сила;
2. Система должна обладать инертностью, чтобы проходить положение равновесия.

Если, помимо возвращающей силы, другие силы в системе отсутствуют, то колебания называют свободными*.* Наиболее простой случай – гармонические колебания, при квазиупругой (пропорциональной смещению от положения равновесия) силе подробно изучается и в школе и в вузе. Однако, даже для этого случая, компьютерное моделирование в Excel позволяет гораздо глубже понять происходящие при этом процессы. В реальности же, да и во многих учебных задачах, присутствуют силы меняющиеся отнюдь не линейно. Например, математический маятник при больших амплитудах колеблется отнюдь не гармонически, т.к. в этом случае возвращающая сила пропорциональна не смещению, а синусу угла отклонения. Если в системе присутствует сила сопротивления, пропорциональная скорости, то мы получаем экспоненциально затухающие колебания. При вынужденных колебаниях в системе может присутствовать вынуждающая сила, сложным образом (не обязательно гармонически) зависящая и от состояния системы и от времени. При этом можно наблюдать и изучать, например, такое явление как резонанс. В системе могут складываться несколько различного типа колебаний. При параметрических колебаниях могут сложным образом меняться параметры самой системы. Аналитическое решение подобных задач требует сложного, не всегда доступного школьникам и даже студентам, математического аппарата и зачастую не всегда возможно. Использование компьютерного моделирования позволяет решать все вышеперечисленные задачи, получать результирующие колебания и исследовать их, фактически применяя лишь второй закон Ньютона в виде дифференциального уравнения второго порядка  или его аналог для вращательного движения . При этом и сила и масса (при вращательном движении - момент сил и момент инерции) могут меняться сложным образом. Это достигается тем, что используемое при компьютерном моделировании численное решение всегда дискретно, т.е. мы разбиваем время на малые, хотя и конечные промежутки dt. От величины этого промежутка зависит точность вычислений, и необходимо использовать специальные приёмы для грамотного выбора величины dt и проверки корректности вычислений. Если аналитически интеграл берётся далеко не всегда, в результате чего задача далеко не всегда имеет аналитическое решение, то при численном решении интеграл заменяется суммой малых, но конечных приращений, что позволяет решить задачу с заданной точностью.

В программе Excel это может выглядеть, например, следующим образом. В столбцах располагаются переменные, например время, ускорение, скорость и координата. Каждая строка соответствует своему значению времени. Время лучше задавать формулой ti = ti + dt, где i – номер строки, ti – значение времени в данной ячейке, а ti-1 – значение в предыдущей строке, а шаг dt задаём в отдельной ячейке, что впоследствии поможет легко изменять его. Разумеется, эта формула начинается с третьей строки, в первой пишем название переменной, во второй – начальное значение. Так же задаём начальные значения скорости и координаты, но не ускорения, поскольку оно зависит от силы, т.е. от предыдущего значения координаты. Ускорение находим как a = F/m, причём сила и масса могут зависеть от многих параметров. Например, при гармонических колебаниях ai = - (k/m)xi-1, при затухающих колебаниях ai = - (k/m)xi-1 - (μ/m)Vi-1,при вынужденных ai = - (k/m)xi-1+F0cos(ωti) и т.д.  Теперь остаётся задать формулы для численного интегрирования Vi = Vi-1 + aidt, xi = xi-1 +Vi dt и построить график (точечную диаграмму) x(t).

После этого можно исследовать полученные графики: например, проверить соответствие периода и других параметров колебаний аналитической формуле; построить на той же диаграмме синусоиду (или косинусоиду в зависимости от начальной фазы) и убедиться, что она с высокой точностью совпадает с графиком, полученным в результате моделирования; меняя частоту вынуждающей силы добиться резонанса и убедиться, что он происходит при совпадении частоты вынуждающей силы с собственной частотой колебаний системы; при резонансе с сопротивлением, проверить соответствие установившейся амплитуды аналитической формуле; проверить выполнение закона сохранения энергии и многое другое. Кстати, несоответствие (при правильном построении) свидетельствует о неверном выборе шага dt, и его следует уменьшать до тех пор пока результат с необходимой точностью перестанет зависеть от dt и будет соответствовать аналитическому.

Ниже приведены некоторые примеры графиков колебаний, построенных в Excel. Исследования графиков показывают соответствие с высокой точностью полученных результатов с решениями, получаемыми традиционно аналитически.

Гармонические колебания под действием квазиупругой силы. Начальная координата равна 10, начальная скорость – 0, k/m=1, т.е. период равен 2π.



Связанные маятники. На каждый действует своя квазиупругая сила и сила связи, пропорциональная расстоянию между ними. Аналитическое решение - биения со сдвигом по фазе.



Затухающие колебания



Вынужденные колебания. Резонанс.





Анализ графиков дает основания для некоторых выводов. При очень малом затухании амплитуда в резонансе будет большой, но ее установление длится очень долго. Чем более резко выражен резонанс, тем медленнее происходит установление. Это легко объяснить с помощью энергетических соображений: чем острее резонанс, тем больше запасаемая системой энергия и, следовательно, тем больше времени требуется для того, чтобы сообщить системе эту энергию.

Таким образом, моделирование колебательных процессов в Microsoft Excel даёт возможность гораздо более наглядно изучить колебания любой природы.

*Публикация:*

